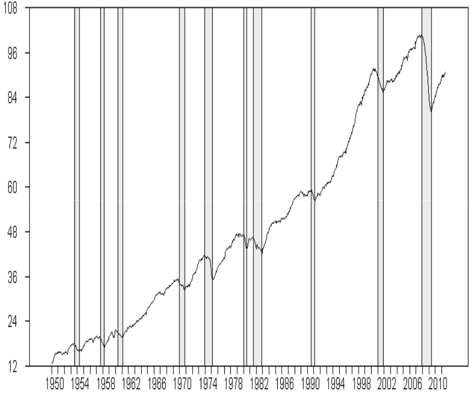
Stationarity

Laurent Ferrara

Master 2 EIMPC
Université Paris Ouest

Overview


108
96
84
72
60
48
36
24
12
1950
1954
1958
1962
1966
1970
1974
1978
1982
1986
1990
1994
1998
2002
2006
2010

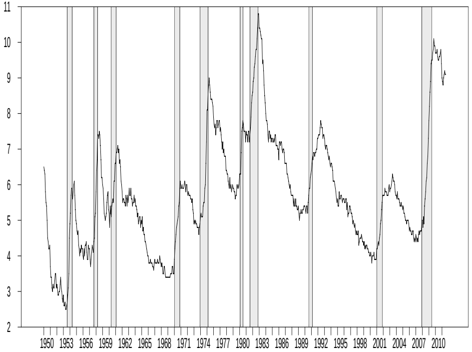
Long-term growth

3 factors are responsible for this long-term growth

1. Increase of the population : more people can produce a greater quantity of goods and services
2. Stock of equipment and facilities has increased overtime
3. Techniques of production have led to increases in the productivity

Long-term growth

In spite of this long-term growth, evidence on periods with negative growth rates = economic recessions. This corresponds to business cycles.
Not related to long-term factors.
Clearly visible on unemployment rate, with asymmetric behaviour.
Is this series stationary ?


11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1950
1953
1956
1959
1962
1965
1968
1971
1974
1977
1980
1983
1986
1989
1992
1995
1998
2001
2004
2007
2010

Difference Stationary vs Trend Stationary

We assume the standard decomposition of s.a. macro time series:

$$Y_t = T_t + C_t + e_t,$$

T_t = trend,
C_t = cycle.
2 types of non-stationarity: DS vs TS

Dickey-Fuller tests

Test basé sur la régression linéaire suivante:

$$\Delta X_t = C + \delta t + \rho X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} a_i \Delta X_{t-i} + u_t, \qquad (1)$$

où C est une constante et $(u_t)_t$ est un bruit blanc faible.

- C et δt peuvent être inclues ou non dans la régression, donnant ainsi trois types de test possibles.
- L'hypothèse nulle $H_0 : \rho = 0$ est ainsi testée à l'aide de la statistique de Student suivante : $\hat{\rho}/\sqrt{Var(\hat{\rho})}$.
- Les valeurs critiques usuelles ne sont pas valides dans ce type ce test. Les valeurs critiques à utiliser dans chacun des trois cas possibles ont été tabulées par Dickey et Fuller.

Dickey-Fuller tests

Application to IPI series

```
Null Hypothesis: there is a unit root
Type of Test: t-test
Test Statistic: -1.305
P-value: 0.6276
Coefficients:
lag1 lag2 lag3 lag4 lag5 lag6 lag7 lag8 constant
-0.0066 -0.4586 -0.0341 0.2950 0.2376 0.2147 0.1943 0.1296 0.6560
Degrees of freedom: 218 total; 209 residual
Residual standard error: 0.7095
```

Dickey-Fuller tests

On observe ainsi que l'hypothèse nulle de non-stationarité de la série est acceptée par le test. Nous pouvons étendre ce résultat à d'autres spécifications du test. Par exemple, l'option `lags` permet de choisir le nombre p de retards à inclure dans la régression et l'option `trend` permet de choisir les variables déteministes à inclure dans la régression:
`trend="nc"` : pas de constante ni de tendance linéaire
`trend="c"` : constante mais de tendance linéaire
`trend="ct"` : constante et tendance linéaire.

Dickey-Fuller tests

Ainsi, on peut mener le test suivant :

```
Test for Unit Root: Augmented DF Test
Null Hypothesis: there is a unit root
Type of Test: t-test
Test Statistic: 2.08
P-value: 0.9912
Coefficients:
lag1
0.0012
Degrees of freedom: 225 total; 224 residual
Residual standard error: 0.8007
```

On conclut de manière similaire à la non-stationnarité de la série. Les différentes spécifications du test mènent à des conclusions identiques.

Dickey-Fuller tests

Il reste donc à vérifier que la série différenciée du taux de croissance mensuel est bien stationnaire.

```
Test for Unit Root: Augmented DF Test
Null Hypothesis: there is a unit root
Type of Test: t-test
Test Statistic: -20.49
P-value: 1.997e-36
Coefficients:
lag1
-1.3072
Degrees of freedom: 224 total; 223 residual
Residual standard error: 0.7951
```

Ainsi, on accepte bien la stationnarité de la série du taux de croissance mensuel de l'IPI. On pourra donc proposer un processus pour cette série.

KPSS test

Ce test permet de tester l'hypothèse nulle de stationnarité à partir de la statistique suivante:

$$\nu = \frac{1}{n^2 s^2(l)} \sum_{t=1}^{T} S_t^2, \tag{2}$$

où $s^2(l)$ est la variance de long terme de la série $(\hat{e}_t)_t$, cette série étant le résidu de la régression suivante:

$$X_t = \tau + \delta t + e_t,$$

et où S_t est la somme partielle de ces résidus estimée par $\hat{S}_t = \sum_{i=1}^{t} \hat{e}_i$.

KPSS test

Phillips et Perron (1988) proposent d'estimer la variance de long terme de la manière suivante :

$$\hat{s}^2(l) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{e}_t^2 + \frac{2}{T}\sum_{j=1}^{l}\omega(j,l)\sum_{t=j+1}^{n}\hat{e}_t\hat{e}_{t-j}, \qquad (3)$$

où les poids sont en général donnés par l'égalité suivante (voir Newey and West (1994)):

$$\omega(j,l) = 1 - \frac{j}{l+1}. \qquad (4)$$

Les valeurs critiques à utiliser ont été tabulées par Phillips et Perron.

Phillips-Perron tests

```
Test for Unit Root: Phillips-Perron Test
Null Hypothesis: there is a unit root
Type of Test: t-test
Test Statistic: -0.3045
P-value: 0.9208
Coefficients:
lag1 constant
-0.0023 0.3292
Degrees of freedom: 225 total; 223 residual
Residual standard error: 0.8018
```

Le test de PP confirme la non-stationnarité de la série même en prenant un risque α très élevé (p-value de 0.9208). De manière similaire à précédemment, le test accepte l'hypothèse de stationnarité de la série du taux de croissance mensuel.

Remarque

Il est à souligner que ces tests de stationnarité sont peu puissants en particulier contre l'alternative de stationnarité avec longue mémoire. En effet, dans le cas d'une forte persistence dans une série stationnaire, les tests de racine unitaire auront tendance a rejeter à tort la stationnarité. Ce résultat aura donc tendance à entraîner une sur-différenciation de la série (on différencie une série déjà stationnaire), donc une perte d'information dommageable pour le modélisateur.

Modèles ARIMA

Definition

Un processus du second ordre $(X_t)_{t \in Z}$ est défini comme étant un processus
ARIMA(p, d, q), si le processus $((I - B)^d X_t)_{t \in Z}$ est un processus ARMA.

Choix de l'entier d

Si la trajectoire observée est issue d'un processus faiblement stationnaire, alors on dira alors que le processus $(X_t)_{t \in Z}$ est intégré d'ordre 0; sinon, on suppose qu'il existe un entier $d > 0$ tel que $(I - B)^d X_t$ est asymptotiquement faiblement stationnaire, B étant l'opérateur retard. On dira alors que le processus $(X_t)_{t \in Z}$ est intégré d'ordre d. Cependant, dans la majorité des cas rencontrés en pratique l'entier d correspondant à l'ordre d'intégration est égal à l'unité. Ainsi, le problème du modélisateur revient alors à se demander quel est l'ordre d'intégration du processus, ce qui est équivalent à tester l'hypothèse $H_0 : \{d = 0\}$ contre l'hypothèse $H_1 : \{d = 1\}$.